Θεώρημα: Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$ ώστε f, g συνεχείς στο x_0. Τότε:

(i) Η $f+g$ είναι συνεχής στο x_0.

(ii) Η $f \cdot g$ είναι συνεχής στο x_0.

(iii) Αν $g(x_0) \neq 0$ η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0.

1η απόδειξη: (με χρήση του ορισμού)

(i) Έστω $\varepsilon > 0$.

Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε αν $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta_1$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$.

Εφόσον η g είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε αν $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta_2$, τότε $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2$

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

Για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| = |(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

2η απόδειξη: (με αρχή της μεταφοράς)

(i),(ii),(iii) Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο A με $x_n \to x_0$.

Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0, προκύπτει $f(x_n) \to f(x_0)$.

Εφόσον η g είναι συνεχής στο x_0, προκύπτει $g(x_n) \to g(x_0)$.

Συνεπώς, $f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0)$

$$f(x_n) \cdot g(x_n) \to f(x_0) \cdot g(x_0)$$

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

Επομένως, οι $f+g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$ είναι συνεχείς στο x_0.

Θεώρημα: Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $g : B \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ώστε $f(A) \subseteq B$ και $x_0 \in A$.

Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε, η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.

1η απόδειξη (αρχή της μεταφοράς)

Έστω (x_n) ακολουθία στο A με $x_n \to x_0$.
Εφόσον η f συνεχής στο x_0, προκύπτει $f(x_n) \to f(x_0)$.
Εφόσον η g συνεχής στο x_0, προκύπτει $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ δηλαδή
$(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$.
Επομένως, η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

2η απόδειξη: (με τον ορισμό)

Έστω $\varepsilon > 0$.

Εφόσον η g συνεχής στο $f(x_0)$ υπάρχει $\zeta > 0$ ώστε για κάθε $y \in B$
αν $|y - f(x_0)| < \zeta$ τότε $|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ (I)
Από τη συνέχεια της f στο x_0 υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$
αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \zeta$ (II)

Για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ από την (II) προκύπτει $|f(x) - f(x_0)| < \zeta$
Από την (I) προκύπτει $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ δηλαδή
$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon$

Επομένως, η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Παρατήρηση: Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Αν υπάρχει $c > 0$ ώστε
$|f(x) - f(x_0)| \leq c \cdot |x - x_0|$, για κάθε $x \in A$ τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη:
Έστω $\varepsilon > 0$.
Ορίζουμε $\delta = \varepsilon / c$ κ.τ.λ.

Εφαρμογή: Συνέχεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. $|\sin u| \leq |u|$

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sin x$

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \sin\frac{x - x_0}{2} \cdot \cos\frac{x + x_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \underbrace{\left|\cos\frac{x - x_0}{2}\right|}_{\leq 1} \leq 2 \cdot \left|\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot 1 = |x - x_0|.$$

Άρα, η f είναι συνεχής.

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Άρα, η g είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

(iii) $h(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Άρα, η h είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.

Παρατήρηση: Από το πρώτο θεώρημα που αναφέραμε, οι συναρτήσεις $x, x^2, x^3, \dots$ είναι συνεχείς, όπως επίσης κάθε πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ και κάθε ρητή συνάρτηση (δηλαδή $\frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα).

Επίσης (πάλι με χρήση της αρχής της μεταφοράς) προκύπτει ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η $g: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ $g_k(x) = \sqrt[k]{x}$ είναι συνεχής.

Προκύπτει (από θεώρημα που αφορά τη σύνθεση συναρτήσεων) ότι για $a \in \mathbb{Q}$, η $g_a(x) = x^a$ είναι συνεχής.

Επίσης, αποδεικνύεται (θα παραλείψουμε την απόδειξη) ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ η $g_a: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ $g_a(x) = x^a$ είναι συνεχής.

Εφαρμογή: Έστω $a > 0$. Η συνάρτηση $f_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_a(x) = a^x$ είναι συνεχής.

Απόδειξη:

1η περίπτωση: $a = 1$. Η f_a είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή 1 άρα συνεχής.

2η περίπτωση: $a > 1$. Αρχικά, δείχνουμε πως η f_a είναι συνεχής στο 0. Για $a > 1$, η f_a είναι γνησίως αύξουσα. Από τα γνωστά στις ακολουθίες $\sqrt[n]{a} \to 1$ και $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1$.

Έστω $\varepsilon > 0$.

Εφόσον $\sqrt[n]{a} \to 1$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_1$ $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$

Εφόσον $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_2$ $\left|\frac{1}{\sqrt[n]{a}} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{1}{\sqrt[n]{a}} < 1 + \varepsilon$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ και $\delta = \frac{1}{n_0} > 0$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - 0| < \delta$

Ισχύει: $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n_2}} \leq a^{-\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n_0}} \leq a^{\frac{1}{n_1}} < 1 + \varepsilon \Rightarrow |a^x - 1| < \varepsilon$

Άρα, η f_a είναι συνεχής στο 0.

Για τυχαίο $x \in \mathbb{R}$ Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \to x_0 \Rightarrow x_n - x_0 \to 0$ και εφόσον η f_a είναι συνεχής στο 0 προκύπτει $a^{x_n - x_0} \to a^0 = 1 \Rightarrow \frac{a^{x_n}}{a^{x_0}} \to 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^{x_n} \to a^{x_0} \Rightarrow f_a(x_n) \to f_a(x_0)$.

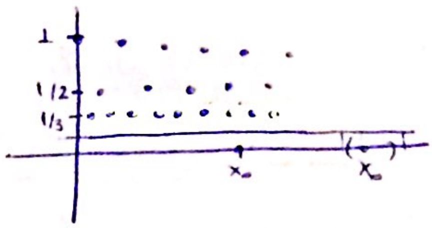
Επομένως, η f_a συνεχής στο x_0.

3η περίπτωση: $0<a<1$. Τότε, $\frac{1}{a}>1$ άρα $f_{1/a}$ συνεχής.
Εφόσον $f_a = \frac{1}{f_{1/a}}$ η f_a είναι συνεχής.

Εφαρμογή: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=(\sin(x^3))^5$
Η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x^3$ συνεχής ως πολυωνυμική
Η $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x)=\sin x$ συνεχής
Άρα, η $h\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $(h\circ g)(x)=\sin(x^3)$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών.
Η $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\varphi(x)=x^5$ συνεχής
Άρα, η $\varphi\circ h\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $(\varphi\circ h\circ g)(x)=f(x)$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών

Παράδειγμα:
Έστω $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση (f ακολουθία δηλαδή).
Έστω $n_0\in\mathbb{N}$
Έστω $\varepsilon>0$
Αναζητούμε αν υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $x\in\mathbb{N}$ και $|x-n_0|<\delta$ τότε $|f(x)-f(n_0)|<\varepsilon$.
Θέτω $\delta=1$. Για κάθε $x\in\mathbb{N}$ με $|x-n_0|<1$ ισχύει $x=n_0$.
Άρα, $|f(x)-f(n_0)|=|f(n_0)-f(n_0)|=0<\varepsilon$
Άρα, η f είναι συνεχής στο n_0.

Παράδειγμα:
Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\\ 1/n, & x=m/n,\ m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N} \text{ και } ΜΚΔ(m,n)=1\end{cases}$
Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε άρρητο και ασυνεχής σε κάθε ρητό.
Έστω $x_0\in\mathbb{Q}$. Θα δείξουμε ότι η f ασυνεχής στο x_0.
$f(x_0)>0$
Επιλέγουμε (x_n) ακολουθία αρρήτων με $x_n\to x_0$.



Τότε, $f(x_n)\overset{x_n \text{ άρρητος}}{=}0 \not\to f(x_0)$. Από την αρχή της μεταφοράς, η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

Έστω $x_0\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Θα δείξουμε ότι η f συνεχής στο x_0.
Έστω $\varepsilon>0$
Επιλέγουμε n_0 ώστε $1/n_0<\varepsilon$
Στο διάστημα $(x_0-1/2, x_0+1/2)$ υπάρχει → το πολύ ένας φυσικός
→ το πολύ δυο αριθμοί με παρονομαστή 2
Το σύνολο $A=\{x\in(x_0-1/2,x_0+1/2) : f(x)>1/n_0\}$ είναι πεπερασμένο
→ το πολύ n_0-1 αριθμοί με παρονομαστή n_0-1.

Έστω $A=\{x_1,\dots,x_d\}$, $x_0\notin A$.

Έστω $\delta=\min\{|x_i-x_0|, i=1,\dots,d\}>0$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $|x-x_0|<\delta$ ισχύει $|f(x)-\overset{0}{f(x_0)}|=f(x)$

$$f(x)\begin{cases} \xrightarrow{\text{αν } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} \ =0<\varepsilon \\ \xrightarrow{\text{αν } x\in\mathbb{Q}} \ \text{τότε } x=\frac{m}{n},\ m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N} \\ \quad \text{ΜΚΔ}(m,n)=1 \quad n\geq n_0 \\ \quad f(x)\leq 1/n_0<\varepsilon \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση:</u> Για να εξετάσω τη συνέχεια μιας $f:A\to\mathbb{R}$ σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αρκεί να εξετάσω την f μόνο "κοντά" στο x_0. Δηλαδή αν $\delta_1>0$ ώστε ο περιορισμός της f στο $A\cap(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ να είναι συνεχής στο x_0. [Δηλαδή, η συνάρτηση $\tilde{f}:A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)\to\mathbb{R}$ με $\tilde{f}(x)=f(x)$ να είναι συνεχής στο x_0] Τότε, η f είναι συνεχής στο x_0.

<u>Απόδειξη:</u>

Έστω $\varepsilon>0$. Βρίσκουμε $\delta_2>0$ $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(x_0)|<\varepsilon$

Θέτουμε $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ κ.τ.λ.

<u>Παρατήρηση:</u> Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε f συνεχής στο x_0.

Τότε $\exists\delta>0$ και $M>0$ $|f(x)|\leq M$ $\forall x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$

<u>Απόδειξη:</u>

Από τον ορισμό της συνέχειας, για $\varepsilon=1$

Προκύπτει ότι για κάθε $x\in A$ με $|x-x_0|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-f(x_0)|<1$

Έτσι, $\forall x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$|f(x)|\leq|f(x)-f(x_0)+f(x_0)|\leq|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|\leq 1+|f(x_0)|$

Για $M=1+|f(x_0)|$ ισχύει το συμπέρασμα.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f είναι φραγμένη.

<u>Απόδειξη:</u> Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι η f δεν είναι φραγμένη.

Τότε $\forall n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $x_n\in[a,b]$ ώστε $|f(x_n)|\geq n$.

Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία, από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass

έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Έτσι, υπάρχει $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε $x_{k_n}\to\xi$

Εφόσον $a\leq x_{k_n}\leq b$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και $x_{k_n}\to\xi$, προκύπτει $\xi\in[a,b]$

Λόγω της συνέχειας της f στο σημείο ξ, από την αρχή της μεταφοράς προκύπτει $f(x_{k_n})\to f(\xi)$

Άρα, η (x_{k_n}) φραγμένη. Άτοπο, διότι $|f(x_{k_n})|$ [illegible]

Επομένως, η f φραγμένη.